Studio di una funzione goniometrica

Studiare e rappresentare la funzione

$$f(x)=\frac{tgx}{tgx+1}$$

precisando in particolare i punti di discontinuità.

Elaborazioni

1) La funzione è periodica con periodo T=π, quindi basta limitare lo studio all'intervallo [0; π].
2) Dominio di definizione- Limitatamente all'intervallo [0; π], la funzione tgx non è definita nel punto x=π/2; inoltre deve essere diverso da zero il denominatore e tgx+1=0 con x=3π/4. Concludiamo che il dominio di definizione è $A=[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\}$. Estendendo il discorso a tutto l'asse reale il dominio di definizione è $A=\bigcup_{k\in Z}\left(\left[k\pi;(1+k)\pi\right]-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\}\right)$.
3) Segno e zeri
   a. La funzione si annulla solo agli estremi dell'intervallo, quindi x=0 ed x=π sono gli unici zeri.
   b. tgx>0 per 0<x<π/2, mentre tgx<0 per π/2<x<π.
   c. tgx+1>0 se tgx>-1 e ciò si verifica per nell'insieme $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$.
   d. Confrontando i segni del numeratore del denominatore si conclude che la funzione è positiva nell'insieme $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$ e negativa nell'intervallo $\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$.
4) Limiti

   Si devono studiare i limiti nei due punti $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{4}$. Risulta:

   a) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{tgx}{tgx+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$, forma indeterminata. Posto y=tgx, si ha

   $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{tgx}{tgx+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y\left(1+\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{y}}=1.$$

   b) Con procedimento analogo si ricava $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{tgx}{tgx+1}=\lim_{y\to-\infty}\frac{y}{y+1}=1$.

   c) $\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-}\frac{tgx}{tgx+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$; $\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{tgx}{tgx+1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$.

Conclusione. Sebbene i punti $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ non appartengano al dominio della funzione, essendo gli stessi punti di accumulazione per il dominio, dai risultati ottenuti si è soliti affermare che in $x=\frac{\pi}{2}$ la funzione presenta una discontinuità eliminabile (di terza specie) e che nel punto $x=\frac{3\pi}{4}$ vi è una di discontinuità di seconda specie. La retta avente equazione $x=\frac{3\pi}{4}$ è asintoto verticale per il diagramma della funzione. Ribadiamo che il punto $P\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ non fa parte del grafico della funzione.

Dai valori ottenuti per i limiti laterali nel punto $x=\frac{3\pi}{4}$ si riconosce anche che la funzione non è limitata inferiormente, né superiormente, quindi Inf(f)=-∞, Sup (f)=+∞

5) Monotonia, massimi e minimi relativi.

Applicando il teorema sul limite di un rapporto di due funzioni si ricava la seguente espressione per la funzione derivata prima:

$$f'(x)=\frac{\left(1+tg^2x\right)\left(1+tgx\right)-tgx\left(1+tg^2x\right)}{\left(tgx+1\right)^2}=\frac{1+tg^2x}{\left(tgx+1\right)^2}$$

Si riconosce che in ogni punto del dominio risulta $f'(x)>0$, pertanto la funzione non ammette punti di massimo, né di minimo relativo. La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli: $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$, $\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$.

6) Concavità, convessità e flessi

L'espressione della funzione derivata seconda è

$f''(x)=\frac{2\left(1+tg^2x\right)\left(tgx-1\right)}{\left(tgx+1\right)^3}$, che si annulla nel punto $x=\frac{\pi}{4}$. Inoltre risulta

$f''(x)>0$ in $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$,

dove la concavità è rivolta verso l'alto (la funzione è convessa);

$f''(x)<0$ in $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$,

dove la concavità è rivolta verso il basso (funzione è concava).

Il punto $F_1\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ è di flesso per il diagramma della funzione; il punto di flesso successivo sarà $F_2\left(\frac{5\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$. I punti di flesso sono a tangente obliqua perché in essi la derivata prima non si annulla. In particolare si tratta di flessi ascendenti.

Equazione della retta tangente nel punto $F_1\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$

$$t_{F_1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Segue il diagramma della funzione.

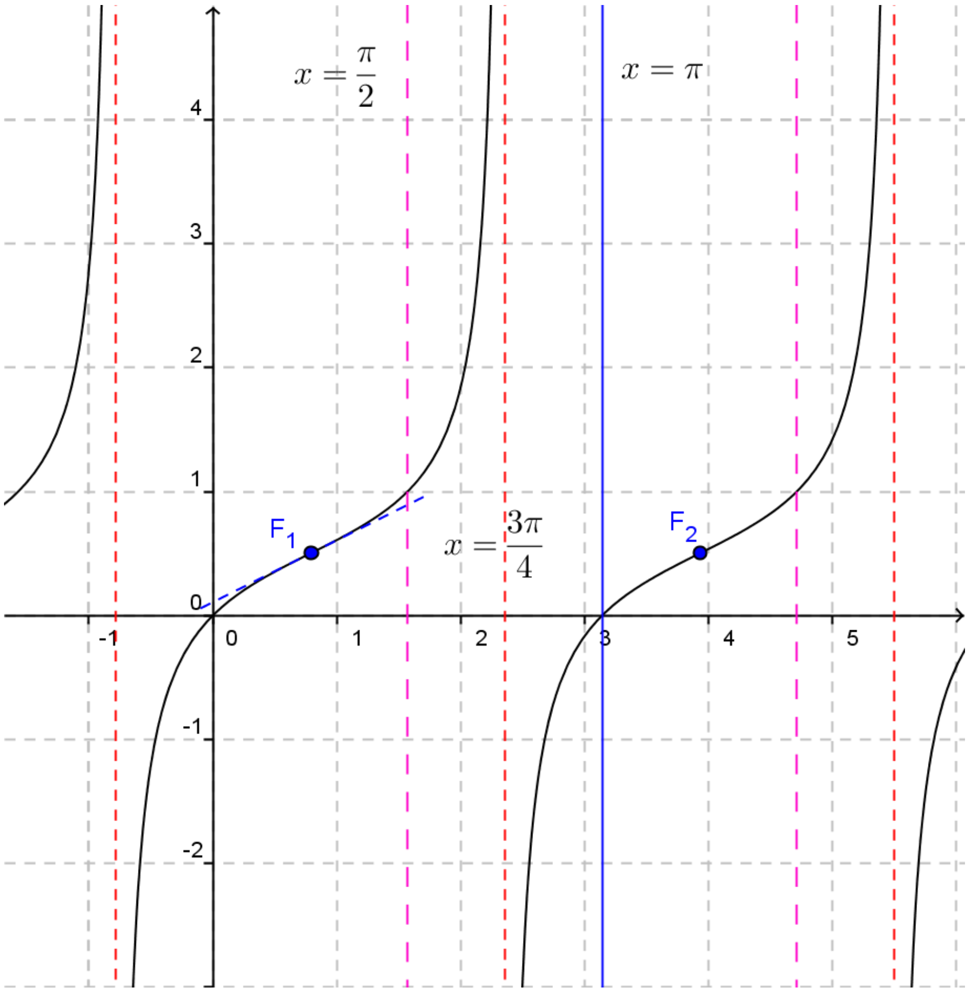

Figura 1- In figura sono rappresentati gli asintoti verticali x=-π/4, x=3π/4, x=7π/4, i due punti di flesso F_1, F_2 e un segmento della tangente nel punto di flesso F_1 con stile tratteggio in modo da riconoscere più facilmente l'andamento della concavità del diagramma in un intorno completo dello stesso.