# Funzione di due variabili

## Ricerca dei punti di massimo o di minimo relativi o assoluti liberi

Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi o assoluti della funzione

1) $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$

dopo averne precisato il dominio di definizione.

**Soluzione**

La funzione ha come dominio di definizione $R^2$ ed è continua e dotata di derivate parziali di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio.

### Ricerca dei punti critici

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni ottenute uguagliando a zero le derivate parziali prime rispetto a ciascuna delle due variabili.

Premettiamo che essendo la funzione illimitata sia superiormente [(1)], sia inferiormente, gli eventuali punti di massimo o di minimo potranno essere solo locali.

Le derivate parziali prime nel generico punto P(x;y) del dominio valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x^{'} = 3x^2 - 6x; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y^{'} = 3y^2 - 3$$

Il sistema da risolvere è $\begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$, che è di quarto grado ed ammette come soluzioni le coppie ordinate (x=0;y=1), (x=0;y=-1), (x=2;y=1), (x=2;y=-1). Siano A(0; 1), B(0; -1), C(2; 1), D(2; -1) i quattro punti critici corrispondenti del dominio di definizione della funzione .

Per stabilire la tipologia di punto che presenta la funzione in ciascuno dei suddetti quattro punti determiniamo l'espressione dell'Hessiano H(x;y), quindi lo calcoleremo in ciascuno dei quattro punti e preciseremo il tipo di punto esaminato per la funzione.

Ricordiamo che il determinante Hessiano della funzione si compone con le derivate parziali del secondo ordine ed è

$$H(x;y) = \begin{vmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{yx}^{"} & f_{yy}^{"} \end{vmatrix}$$, avendosi $f_{xx}^{"} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy}^{"} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{yx}^{"} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $f_{yy}^{"} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

---

[(1)] Si noti che al variare del punto P(x;0) nel dominio di definizione risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x;0) = \lim_{x\to+\infty} x^2(x-1) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x;0) = \lim_{x\to-\infty} x^2(x-1) = -\infty$, perciò Sup(f)=+∞ e Inf(f)=-∞.

Ricordiamo ancora che per il teorema Schwarz le derivate parziali seconde miste $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ quando esistono sono uguali.

Si hanno i seguenti valori delle derivate parziali seconde nel generico punto P(x;y) del dominio:

$f''_{xx} = 6x - 6$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 6y$

per cui **l'Hessiano** vale:

$$H(x;y) = \begin{vmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36(x-1)y$$

Determiniamo la **tipologia dei singoli punti**.

Nel punto A(0; 1) risulta $H(0;1) = 36(0-1)\cdot 1 = -36 < 0$, quindi il punto non è né di massimo, né di minimo relativo. Osservato che $f''_{xx}(0;1)\cdot f''_{yy}(0;1) = -6\cdot 6 = -36 < 0$ si conclude che **il punto A è di sella**(2) .

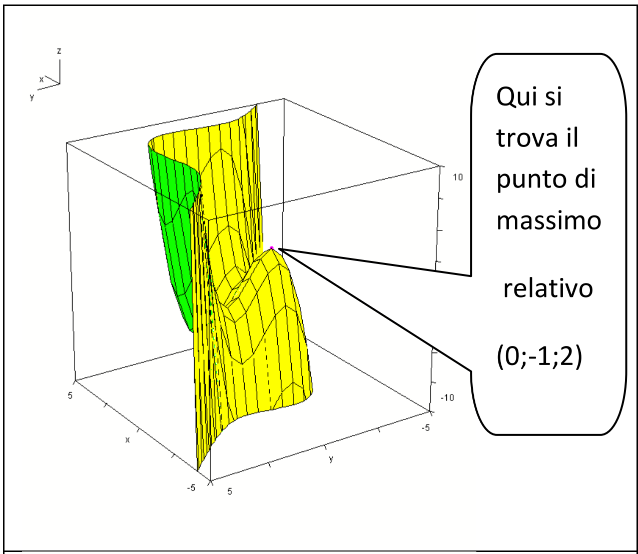
Nel punto B(0;-1) risulta $H(0;-1) = 36(0-1)\cdot(-1) = 36 > 0$ ed anche $f''_{xx}(0;-1) = -6 < 0$, quindi **il punto B è di massimo relativo**, con **Max=f(0;-1)=2**.

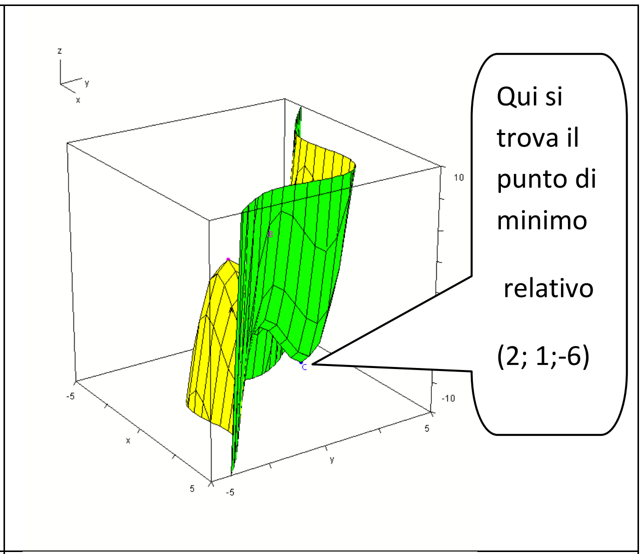
Nel punto C(2; 1) risulta $H(2;1) = 36(2-1)\cdot 1 = 36 > 0$ e $f''_{xx}(2;1) = 6 > 0$, quindi **il punto C è di minimo relativo**, con min=f(2;1)=8+1-12-3=-6.

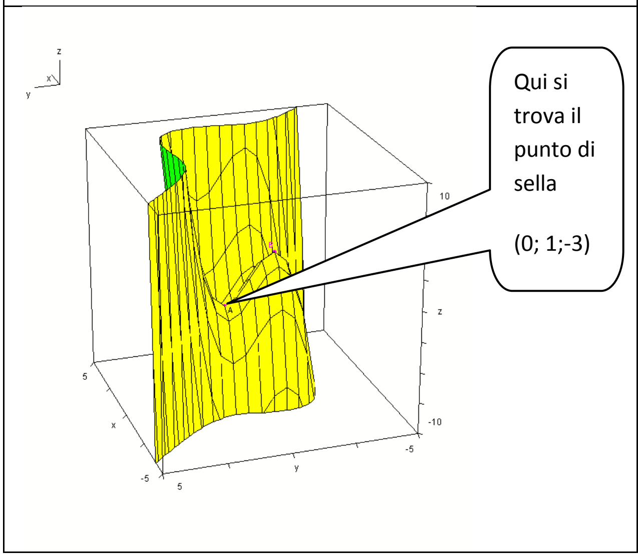
Nel punto D(2;- 1) risulta $H(2;-1) = 36(2-1)\cdot(-1) = -36 < 0$, quindi il punto D non è né di massimo, né di minimo relativo. D'altra parte nello stesso punto risulta anche $f''_{xx}(2;-1)\cdot f''_{yy}(2;-1) = 6\cdot(-6) = -36 < 0$, quindi **il punto D è di sella**.

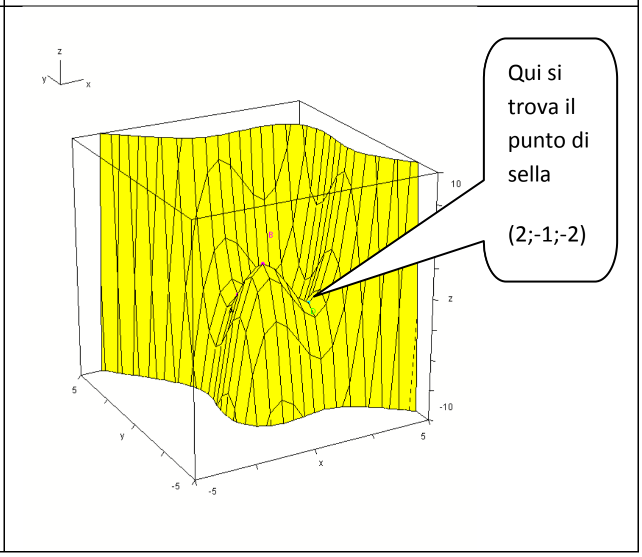
Nella tabella che segue sono raccolte quattro immagini parziali della superficie della funzione z=f(x;y) relative al sottoinsieme quadrato [-5;5]x[-5;5] del dominio di definizione e si possono osservare alcune caratteristiche geometriche della superficie stessa.

(2) Ricordiamo che se si fosse verificato $f''_{xx}(0;1)\cdot f''_{yy}(0;1) > 0$ il punto A sarebbe stato di flesso.


Qui si
trova il
punto di
massimo
relativo
(0;-1;2)


Qui si
trova il
punto di
minimo
relativo
(2; 1;-6)


Qui si
trova il
punto di
sella
(0; 1;-3)


Qui si
trova il
punto di
sella
(2;-1;-2)