Confronto di infiniti nel continuo

Confrontare per $x \to +\infty$ gli infiniti $f(x) = e^{x^2+x}$, $g(x) = x \cdot 2^{x^2}$, $h(x) = x^{100}$.

Elaborazioni

Premettiamo che per $x \to +\infty$ i due infiniti $f(x)$ e $g(x)$ non hanno ordine e superano qualsiasi ordine r>0 prestabilito. Questa proprietà si esplicita affermando che gli **infiniti** in oggetto sono **di ordine infinitamente grande**. Il terzo infinito $h(x)$ ha invece ordine 100.

Confrontiamo prima $f(x)$ con $g(x)$ studiando il limite del loro rapporto. Nello studio del limite si applica una sola volta la regola di de l'Hôpital e ciò è evidenziato dal simbolo $\overset{H.}{=}$ inserito prima dell'applicazione della suddetta regola. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x\cdot 2^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}\cdot e^x}{x\cdot 2^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{x^2} \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \left(\frac{e}{2}\right)^{+\infty} \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \overset{H.}{=} +\infty \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty .$$

Il risultato ottenuto indica che l'infinito $f(x)$ è di ordine superiore all'infinito $g(x)$.

Confrontiamo ora gli infiniti $g(x)$ e $h(x)$ studiando il limite del loro rapporto. Nel corso dell'esercizio applicheremo ancora la regola di de l'Hôpital. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot 2^{x^2}}{x^{100}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x^{99}} \overset{H.}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}\cdot\ln(2)\cdot 2x}{99x^{98}} = \frac{2\ln(2)}{99}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x^{97}}$$

Osserviamo che il limite residuo è dello stesso tipo del limite di partenza, semplicemente l'esponente della potenza al denominatore è diminuito di 2 unità. Applicando nuovamente la regola di de l'Hôpital si ottiene

$$\frac{2\ln(2)}{99}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x^{97}} \overset{H.}{=} \frac{2\ln(2)}{99}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}\cdot\ln(2)\cdot 2x}{97x^{96}} = \frac{(2\ln(2))^2}{99\cdot 97}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x^{95}}$$

Ebbene, l'esponente della potenza al denominatore diminuisce di 2 unità ogni volta che si applica alla funzione rapporto la regola di de l'Hôpital quindi dopo 49 passaggi si perverrà alla seguente forma del limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x^{99}} \overset{H.}{=} (\text{...dopo 49 passaggi}\to) \ \frac{(2\ln(2))^{49}}{99\cdot 97\cdot 95\cdots 3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}}{x}.$$

Applicando ancora una volta la regola di de l'Hôpital si ottiene

$$\frac{(2\ln(2))^{49}}{99\cdot 97\cdot 95\cdots 3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}\cdot\ln(2)\cdot 2x}{1} = \frac{(2\ln(2))^{50}}{99\cdot 97\cdot 95\cdots 3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}\cdot x}{1} = +\infty$$

Osservazione - Facciamo notare che sussiste l'uguaglianza

$$99\cdot 97\cdot 95\cdots 3 = (2\cdot 49+1)(2\cdot 48+1)(2\cdot 47+1)\cdots(2\cdot 1+1)$$

di cui si è tenuto conto nel processo iterativo messo in atto.

Concludiamo che l'infinito $g(x)$ ha ordine maggiore dell'infinito $h(x)$. In definitiva sussiste la seguente sequenza di disuguaglianze per gli ordini dei tre infiniti: Ord($f(x)$)>Ord($g(x)$)>Ord($h(x)$).