Limiti e continuità di funzioni contenenti la parte intera [*x*]

Per le funzioni $f(x)=\frac{x}{[x]}$, $g(x)=\frac{[x]}{x}$, risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Precisare il dominio di definizione di ciascuna funzione.
Q2- Studiare i limiti

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{[x]}$ b) $\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$

Q3- Indicare il tipo di discontinuità che ciascuna funzione presenta nei punti in cui la stessa non è continua.

Soluzione

Q1- Dominio di definizione

Osserviamo che la funzione $f(x)$ è definita nell'insieme $A=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$ in quanto [x]=0 per $0\le x<1$.

La funzione $g(x)$ è definita per ogni $x\neq 0$.

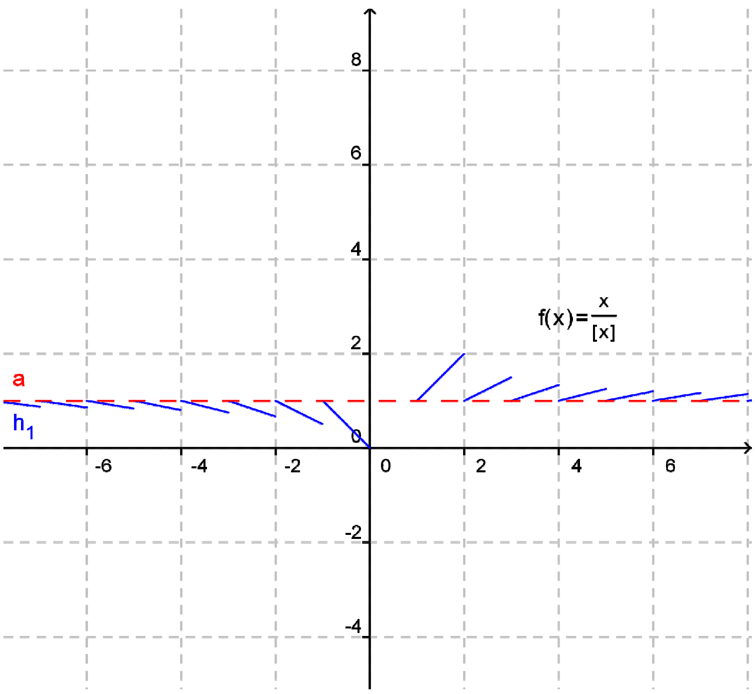
Q2- Limiti

a) Vogliamo provare che risulta $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{[x]}=1$ e per questo è necessario dimostrare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall\varepsilon>0, \exists\bar{x}_\varepsilon\in R: x>\bar{x}_\varepsilon\wedge x\in A\Rightarrow\left|\frac{x}{[x]}-1\right|<\varepsilon \qquad (*)$$

Ebbene, la disuguaglianza $\left|\frac{x}{[x]}-1\right|<\varepsilon$ equivale al seguente sistema

$$\begin{cases}\frac{x}{[x]}>1-\varepsilon\\ \frac{x}{[x]}<1+\varepsilon\end{cases}$$



Considerato che si è interessati a studiare il limite per $x\to+\infty$ e che per $x\ge 1$ risulta $[x]>0$, il sistema di disequazioni si può ridurre alla forma equivalente

$$\begin{cases}x>[x](1-\varepsilon)\\ x<[x](1+\varepsilon)\end{cases}$$, ovvero alla forma

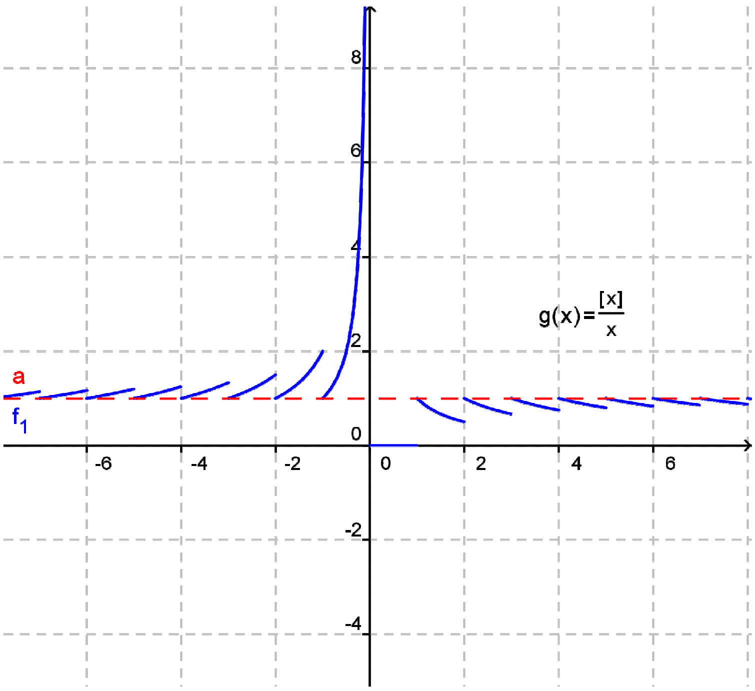
$$\begin{cases}x-[x]>-\varepsilon[x]\\ x-[x]<\varepsilon[x]\end{cases}.$$

Limitiamo dunque le nostre considerazioni per $x\ge 1$.

Osserviamo ora che la differenza $x-[x]$ rappresenta la mantissa di x ed il suo valore descrive l'intervallo [0;1[.

Per quanto concerne la prima disequazione del sistema, visto che il secondo membro è negativo, concludiamo che è soddisfatta per ogni x ≥1.
Per la seconda disequazione, visto che $x-[x]<1$, possiamo fissare l'attenzione sulla disuguaglianza $\varepsilon[x]>1$, perché i valori reali x che la verificano verificheranno a maggior ragione la disuguaglianza $x-[x]<\varepsilon[x]$. La disuguaglianza $\varepsilon[x]>1$ è verificata da tutti i numeri reali x la cui parte intera è maggiore di 1/ε e dunque possiamo scegliere come $\overline{x}_\varepsilon$ il primo numero naturale maggiore o uguale ad 1/ε; ogni x reale maggiore di $\overline{x}_\varepsilon$ soddisfa dunque la seconda disequazione del sistema e, per quanto prima premesso, è soluzione del sistema di disequazioni in esame.
Abbiamo provato che è soddisfatta la proposizione (*) che garantisce la correttezza dell'affermazione sul limite.

b) Il limite $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$ è della forma -1/0 e poiché in un intorno sinistro di x=0 il denominatore è negativo, si conclude immediatamente che il valore del limite è +∞.
A margine è riportato il diagramma della funzione. Il risultato del precedente limite consente di affermare che l'asse delle ordinate è asintoto verticale da sinistra. Il lettore osservi anche che $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=0$



Note per il diagramma
Operatività con GeoGebra
Per ottenere il diagramma della funzione $g(x)=\frac{[x]}{x}$, digitare nella barra della formula il comando y=floor(x)/x.
Per ottenere il testo della funzione nella finestra del grafico, occorre attivare, nella finestra che gestisce il testo, l'opzione per il linguaggio Latex spuntando la relativa casella di controllo, quindi digitare il comando:
g(x)=\frac{[x]}{x}

Q3-
Punti di discontinuità per la funzione *f*(*x*)
La funzione *f*(*x*) ha nel punto *x*=0 una discontinuità di terza specie. Infatti, in detto punto la funzione non è definita, il punto è di accumulazione solo a sinistra ed il limite laterale sinistro esiste e vale zero.
La funzione nel punto x=1 è continua. Osserviamo, infatti, che il punto è di accumulazione solo a destra e che il valore f(1)=1 rappresenta anche quello del limite per $x\to 1^+$.
In ciascuno degli altri punti ad scissa intera x=k, la funzione ha una discontinuità di prima specie; aggiungiamo che in ciascuno di essi la funzione è continua a destra.
Punti di discontinuità per la funzione *g*(*x*)

La funzione presenta nel punto **$x=0$** una **discontinuità di seconda specie** perché il limite laterale sinistro vale $+\infty$. In ogni altro punto $x=k$, con k intero, la funzione presenta una discontinuità di prima specie.