Derivate di funzioni esponenziali e logaritmiche

1) $f(x)=e^{x^2-x}$ Determinare le derivate dei primi due ordini.

$$f'(x)=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)$$

$$f''(x)=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)^2+e^{x^2-x}\cdot 2=e^{x^2-x}\cdot\left(4x^2-4x+3\right)$$

2) $f(x)=xe^{-x^2}$ Determinare le derivate dei primi due ordini.

$$f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

$$f''(x)=e^{-x^2}(-2x)\left(1-2x^2\right)+e^{-x^2}(-4x)=e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$$

3) $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ Determinare le derivate dei primi due ordini.

$$f'(x)=1\cdot e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+x^{-1}\right)$$

$$f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(1+x^{-1}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\left(0-x^{-2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}$$

4) $f(x)=x^2\log x$ Determinare le derivate dei primi due ordini.

$$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\log x+1)$$

$$f''(x)=1\cdot(2\log x+1)+x\cdot\frac{2}{x}=2\log x+3$$

5) $f(x)=x\log\left(x^2+1\right)$ Determinare le derivate dei primi due ordini.

$$f'(x)=1\cdot\log\left(x^2+1\right)+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\log\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}$$

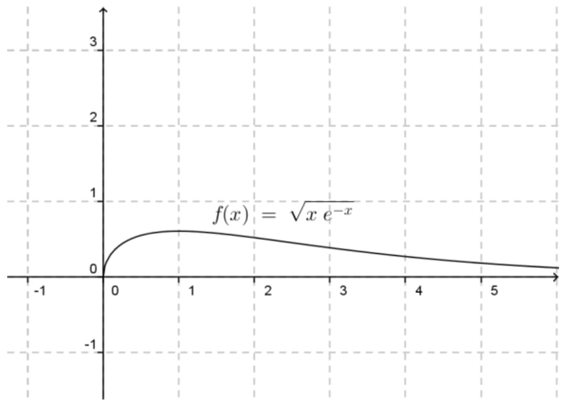
$$f''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x\left(x^2+1\right)-4x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)+4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

6) $f(x)=\log\left(x-\frac{1}{x}\right)$ Determinare la funzione derivata prima.

$$f'(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}$$

7) $f(x)=\sqrt{xe^{-x}}$ Determinare la derivata prima e precisare il suo segno e gli eventuali zeri

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{xe^{-x}}}\cdot\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=\frac{e^{-x}(1-x)}{2\sqrt{xe^{-x}}}$$



$f'(x)>0$ per $0<x<1$;

$f'(x)<0$ per $x>1$;

$f'(x)=0$, per $x=1$. Il punto x=1 è di minimo assoluto, oltre che relativo proprio: $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$.

Il grafico della funzione è a margine.

8) $f(x)=e^x\cdot\frac{x^2-3}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=e^x\cdot\frac{x^2-3}{(x-1)^2}+e^x\cdot\frac{2x(x-1)^2-\left(x^2-3\right)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$e^x\cdot\frac{x^2-3}{(x-1)^2}+e^x\cdot\frac{2\cancel{(x-1)}\left(x(x-1)-\left(x^2-3\right)\right)}{(x-1)^{\cancel{4}3}}=e^x\cdot\frac{x^2-3}{(x-1)^2}+e^x\cdot\frac{2(3-x)}{(x-1)^3}=$$

$$\frac{e^x}{(x-1)^2}\left(x^2-3+\frac{6-2x}{x-1}\right)=\frac{e^x\left(x^3-x^2-5x+9\right)}{(x-1)^3}$$

9) $f(x)=\log_2\left(x^3-\sqrt{x}\right)$

Dopo aver scritto la funzione utilizzando la base naturale per i logaritmi

$f(x)=\frac{\log\left(x^3-\sqrt{x}\right)}{\log 2}$ si ha

$$f'(x)=\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{x^3-\sqrt{x}}\cdot\left(3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\ldots=\frac{6x^{\frac{5}{2}}-1}{2\log 2\cdot\left(x^{7/2}-x\right)}$$

10) $f(x)=x^2\log\left(e^{\frac{x+1}{x}}+1\right)$

Notiamo che $f(x) = x^2 \log\left(e^{1+\frac{1}{x}} + 1\right)$. Per la funzione derivata prima si ha:

$$f'(x) = 2x\log\left(e^{1+\frac{1}{x}} + 1\right) + x^2 \cdot \frac{1}{e^{1+\frac{1}{x}} + 1} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\log\left(e^{1+\frac{1}{x}} + 1\right) - \frac{e^{1+\frac{1}{x}}}{e^{1+\frac{1}{x}} + 1}$$