# Esercitazione sui numeri complessi

## Premessa

1) Per il numero complesso $z = a + ib$

   il modulo è $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;

   la forma trigonometrica è $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$, essendo $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$, $sen\theta = \frac{b}{\rho}$ e $0 \le \theta < 2\pi$.

2) Il coniugato del numero complesso $z = a + ib$ è il numero $\bar{z} = a - ib$
3) Per i numeri complessi sussiste la seguente formula (detta di Moivre):

   $$z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right),\ \forall n \in Z .$$

4) Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento(1) la somma degli argomenti. Pertanto, se sono note le forme trigonometriche dei numeri complessi:

   $$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1),\ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2),$$

   risulta $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\right)$.

5) I quoziente $z_1 : z_2$ dei due numeri complessi $z_1$, $z_2$, con $z_2 \neq 0$, è il numero complesso avente per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza tra l'argomento del primo e l'argomento del secondo. Note le forme trigonometriche dei numeri complessi sussistono le uguaglianze

   $$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

*** ***

## ESERCIZI

## Prima parte

Di ciascun numero complesso z assegnato scrivere la forma trigonometrica e calcolare le potenze indicate.

**1)** $z = 2 + 2i$, calcolare $z^4$ e $z^7$.

Il modulo del numero complesso è: $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Calcolo dell'argomento

(1) Ricordiamo che l'argomento di un numero complesso è chiamato anche "anomalia".

$$\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Forma trigonometrica $\quad z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$

Calcolo delle potenze

$$z^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^6\left(\cos(\pi) + isen(\pi)\right) = -2^6;$$

$$z^7 = \left(2\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\left(7\cdot\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(7\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{10}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{10}(1-i).$$

**2)** $z = 1-\sqrt{3}i$, calcolare $z^3$ e $z^6$

Il modulo del numero complesso è $\rho = \sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

Per l'argomento principale θ risulta

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $sen\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque $\theta = \frac{5}{3}\pi$.

La forma trigonometrica è $z = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + isen\frac{5}{3}\pi\right)$

Calcolo delle potenze richieste.

$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{5}{3}\pi\right) + isen\left(3\cdot\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 8\left(\cos(5\pi) + isen(5\pi)\right) = 8\left(\cos(\pi) + isen(\pi)\right) = -8;$$

$$z^6 = \left(z^3\right)^2 = (-8)^2 = 64.$$

**3)** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcolare $z^5, z^{15}$

Modulo: $\quad \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$

Argomento: $\quad \cos\theta = -\frac{1}{2},\ sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = \frac{2\pi}{3}.$

Forma trigonometrica $\quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cos\frac{2\pi}{3}$

Potenze

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)^5=\cos\frac{10\pi}{3}+i\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;$$

$$z^{15}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)^{15}=\cos\frac{15\cdot 2\pi}{3}+i\cos\frac{15\cdot 2\pi}{3}=\cos 10\pi+i\cos 10\pi=1$$

## Seconda parte

Semplificare l'espressione complessa assegnata operando con i numeri complessi che vi compaiono in forma algebrica.

**1)** $$\frac{4+4i}{1-i}=\frac{4(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{4(1+2i+i^2)}{1-i^2}=\frac{4(1+2i-1)}{1-(-1)}=4i$$

**2)** $$\frac{1+i^2+i^3+(2-i)^3}{1+6i}=\frac{1-1-i+(8-12i+6i^2-i^3)}{1+6i}=\frac{-i+(2-12i+i)}{1+6i}=\frac{2-12i}{1+6i}=$$

$$\frac{2(1-6i)^2}{(1+6i)(1-6i)}=\frac{2(1-12i-36)}{1+36}=-\frac{70}{37}-\frac{24}{37}i$$

**3)** $$1+\sqrt{3}i-\frac{3}{1-\sqrt{3}i}=1+\sqrt{3}i-\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=1+\sqrt{3}i-\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=$$

$$\frac{4(1+\sqrt{3}i)-3(1+\sqrt{3}i)}{4}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

## Terza parte

Dati i numeri complessi $z_1, z_2$ in ciascuno degli esercizi che seguono semplificare la corrispondente espressione complessa.

**1)** Con $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+isen\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2=\sqrt[4]{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}\right)$ calcolare $z_1{}^4\cdot z_2{}^6$.

$$z_1{}^4\cdot z_2{}^6=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\pi}{8}+isen\frac{4\pi}{8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{6}\right)^6\left(\cos\frac{6\pi}{6}+isen\frac{6\pi}{6}\right)=4\cdot\sqrt{6^3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cdot\left(\cos\pi+isen\pi\right)=24\sqrt{6}\,(i)(-1)=-24\sqrt{6}i$$

**2)** Con $z_1=\frac{\sqrt{5}}{3}-i$, $z_2=2+\frac{\sqrt{5}}{2}i$ calcolare $z_1{}^2:\left(\overline{z_2}\right)^{-2}$.

$$z_1^{\,2}:\left(\overline{z_2}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-i\right)^2:\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)^{-2}=\left(\frac{5}{9}-2\frac{\sqrt{5}}{3}i+i^2\right)\cdot\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)^2=$$

$$\left(\frac{5}{9}-1-\frac{2\sqrt{5}}{3}i\right)\left(4-2\sqrt{5}i+\frac{5}{4}i^2\right)=\left(-\frac{4}{9}-\frac{2\sqrt{5}}{3}i\right)\left(\frac{11}{4}-2\sqrt{5}i\right)=$$

$$-\frac{11}{9}+\frac{8\sqrt{5}}{9}i-\frac{11\sqrt{5}}{6}i+\frac{20}{3}i^2=\left(-\frac{11}{9}-\frac{20}{3}\right)+\left(\frac{8\sqrt{5}}{9}-\frac{11\sqrt{5}}{6}\right)i=-\frac{71}{9}-\frac{17\sqrt{5}}{18}i$$