# Equazioni con moduli

## (Per la seconda classe del Liceo)[1]

**Risolvere le seguenti equazioni**

1. $|2x-5|-3=0$ $\qquad S=\{1;4\}$
2. $x-|x-5|=1$ $\qquad S=\{3\}$
3. $|x-1|=|x-5|$ $\qquad S=\{3\}$
4. $|x-1|-2|3x+1|=-12$ $\qquad S=\left\{-3;\frac{9}{5}\right\}$
5. $|2x-|1-x||=4$ $\qquad$ S={-1;3}

## Elaborazioni

1. L'equazione è equivalente alla seguente $|2x-5|=3$, che è soddisfatta se e solo se $(2x-5=3)\vee(2x-5=-3)$, da cui $(x=4)\vee(x=1)$. L'insieme delle soluzioni è $S=\{1;4\}$.
2. $x-|x-5|=1$
   Studiamo il segno dell'argomento del modulo. $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$.
   Per x<5 l'equazione diventa: x-(-x+5)=1,da cui 2x=6→x=3, che è accettabile perché 3<5.
   Per x≥5 l'equazione diventa:x-(x-5)=1, da cui 5=1; quest'uguaglianza è falsa, quindi per x≥5 l'equazione non ammette soluzioni. Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\{3\}$.
3. $|x-1|=|x-5|$
   Premessa- L'equazione $|A(x)|=|B(x)|$, con A(x), B(x) espressioni qualsiasi, è equivalente all'unione logica delle due equazioni A(x)= B(x), A(x)=- B(x). Si devono risolvere separatamente queste ultime equazioni; ciò fatto, detti $S_1$, $S_2$ gli insiemi delle soluzioni rispettivamente della prima e della seconda equazione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è S= $S_1 \cup S_2$.
   Prima equazione: $x-1=x-5$. Quest'equazione non ha soluzioni→ $S_1=\emptyset$.
   Seconda equazione: $x-1=5-x \to 2x=6 \to x=3$, quindi $S_2=\{3\}$.
   L'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è S= $S_1\cup S_2=\emptyset\cup\{3\}=\{3\}$.
4. $|x-1|-2|3x+1|=-12$ Per risolvere quest'equazione si deve studiare il segno di ciascuno degli argomenti che figurano in modulo.
   a. x-1>0⇔x>1
   b. 3x+1>0⇔x>-1/3.

   I due capisaldi -1/3 e 1 suddividono l'asse reale nei seguenti intervalli: $I_1=]-\infty;-1/3[$, $I_2=[-1/3;1[$, $I_3=[1;+\infty[$ in ciascuno dei quali va studiata l'equazione. Procediamo.
   Per x<-1/3 eliminando i segni di modulo l'equazione assume la seguente forma:
   $-x+1-2(-3x-1)=-12$, da cui si ha la forma semplificata $5x=-15$, soddisfatta per **x=-3**; questo **valore**

[1] Esercizi con livello di difficoltà medio-basso (Liv.2-3 su 5)

è **accettabile** perché -3<-1/3.

Nell'intervallo $-\frac{1}{3} \le x < 1$ l'equazione assume la seguente forma algebrica: $-x+1-2(3x+1)=-12$, da cui si ha $-7x=-11$ soddisfatta per $x=\frac{11}{7}$. Il valore trovato non appartiene all'intervallo di ricerca $-\frac{1}{3} \le x < 1$, quindi non è accettabile e dunque nello stesso intervallo l'equazione non ha soluzioni:$S_2=\varnothing$.

Nell'intervallo $I_3=[1;+\infty[$ l'equazione assume la segue te forma: $x-1-2(3x+1)=-12$, dalla quale si ricava l'equazione equivalente $-5x=-9$, soddisfatta per $x=\frac{9}{5}$ che è **accettabile** perché $\frac{9}{5}>1$.

Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S=\left\{-3;\frac{9}{5}\right\}$.

5. $\left|2x-|1-x|\right|=4$ L'equazione contiene moduli annidati; conviene partire con l'analisi del segno dell'argomento del modulo più interno.
   a. 1-x>0 ⇔x<1.
   b. Nell'intervallo x<1 l'equazione assume la forma: $|2x-(1-x)|=4$, da cui $|3x-1|=4$, soddisfatta se e solo se (3x-1=4)∨(3x-1=-4), quindi se e solo se (x=5/3)∨(x=-1). Dei due valori trovati è accettabile solo x=-1, mentre si scarta 5/3 perché maggiore di 1.
   c. Nell'intervallo x≥1 l'equazione diventa: $|2x-(x-1)|=4$, da cui $|x+1|=4$; quest'equazione è soddisfatta se e solo se (x+1=-4)∨(x+1=4), quindi se (x=-5) ∨(x=3). E' accettabile solo x=3.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è S={-1;3}.