Equazioni di secondo grado

Risoluzione con il completamento del quadrato di un binomio

Nota teorica

Consideriamo l'equazione di secondo grado ridotta alla forma normale $ax^2+bx+c=0$ nella quale supponiamo che sia $a>0$.

Risolvendo l'equazione nel campo reale R si possono ottenere le radici applicando la seguente formula risolutiva

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

nella quale il radicando $\Delta=b^2-4ac$, detto discriminante dell'equazione, deve essere non negativo.

Nell'ipotesi in cui sia $\Delta=0$ le due radici sono coincidenti ed il valore è $x_1=x_2=-b/(2a)$.

Nel caso in cui risulti $\Delta<0$ la formula risolutiva (1) si può ancora applicare ma i valori delle radici sono dei numeri complessi. In questa sede non intendiamo diffonderci sulla trattazione dei numeri complessi ma ricordiamo semplicemente che il <<Campo ***C*** dei numeri complessi>> è un'estensione del campo dei numeri reali ***R*** e l'ampliamento si realizza essenzialmente introducendo <<**l'unità immaginaria *i*** >> caratterizzata dalla proprietà che il suo quadrato è uguale a -1

$$i^2=-1 \qquad (2)$$

Il generico numero complesso z si presenta in forma algebrica come segue

$$z=a+ib, \qquad (3)$$

con a e b numeri reali.

In virtù della (2) il numero reale $\Delta<0$ si può scrivere nella forma seguente

$$\Delta=(-1)\,(-\Delta)=i^2(-\Delta) \qquad (4)$$

e la formula risolutiva (1) diventa

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{i^2(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad (5)$$

nella quale ora risulta $-\Delta>0$; conseguentemente i valori delle due radici complesse dell'equazione sono

$$x_1=\frac{-b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad (6)$$

Procedimento risolutivo dell'equazione di secondo grado con il metodo del completamento del quadrato

Possiamo elaborare la forma dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, con $a>0$, come segue:

$$ax^2+bx+c=0 \to a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \to a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0 \to a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0 \to$$
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=0 \to a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \to a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, si riconosce che la base $x+\frac{b}{2a}$ del quadrato del primo membro può assumere i due valori

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e quindi ottenere l'uguaglianza

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dalla quale si ricava

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$, cioè $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Abbiamo così ottenuto la formula risolutiva (1).

Se $\Delta=b^2-4ac<0$, tenendo conto delle relazioni (4) e (5), possiamo scrivere:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{i^2(-\Delta)}{4a^2} \to x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{i^2(-\Delta)}{4a^2}} \to x=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

In definitiva le due radici complesse dell'equazione sono

$$x_1=-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad x_2=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$