Esercitazione

Fattorizzazione di Polinomi e Semplificazione di Frazioni Algebriche

Fattorizzazione - Esercizi n.1..20

1. $a^3-2a^2b+ab^2=a\left(a^2-2ab+b^2\right)=a(a-b)^2$
2. $a^2-b^2+a-b=(a-b)(a+b)+(a-b)=(a-b)(a+b+1)$
3. $a^4-b^2=\left(a^2+b\right)\left(a^2-b\right)$
4. $a^4b-b^5=b\left(a^4-b^4\right)=b\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=b\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b)$
5. $x^3-xy^2=x\left(x^2-y^2\right)=x(x+y)(x-y)$
6. $x^4-x=x\left(x^3-1\right)=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
7. $x^6+y^3=\left(x^2\right)^3+y^3=\left(x^2+y\right)\left(x^4-x^2y+y^2\right)$
8. $x^5-x^2y^6=x^2\left(x^3-y^6\right)=x^2\left(x^3-\left(y^2\right)^3\right)=x^2\left(x-y^2\right)\left(x^2+xy^2+y^4\right)$
9. $ax^2+axy-x^2-xy=x(ax+ay-x-y)=x\left[a(x+y)-(x+y)\right]=a(x+y)(a-1)$
10. $x^5y^2+4x^3y^2+4xy^2=xy^2\left(x^4+4x^2+4\right)=xy^2\left(x^2+2\right)^2$
11. $x^4y^8-8x^2y^4+16=\left(x^2y^4-4\right)^2=\left(xy^2+2\right)^2\left(xy^2-2\right)^2$
12. $ax^3-ay^3+bx^3-by^3=a\left(x^3-y^3\right)+b\left(x^3-y^3\right)=(a+b)\left(x^3-y^3\right)=(a+b)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$
13. $100-2x^2+0{,}01x^4=10^2-2x^2+\left(\frac{1}{10}x^2\right)^2=\left(10-\frac{1}{10}x^2\right)^2$
14. $625a^{4+2m}-\frac{25}{2}a^{2+m}b^{4+n}+\frac{b^{8+2n}}{16}=\left(25a^{2+m}-\frac{b^{4+n}}{4}\right)^2$
15. $a^{4+m}b^8-8a^{2+m}b^4+16a^m=a^m\left(a^4b^8-8a^2b^4+16\right)=a^m\left(a^2b^4-4\right)^2=a^m\left(ab^2-2\right)^2\left(ab^2+2\right)^2$
16. $x^2-x-20=(x+4)(x-5)$
17. $x^4+x^2-20=\left(x^2-4\right)\left(x^2+5\right)=(x-2)(x+2)\left(x^2+5\right)$
18. $a^5-3a^4x+3a^3x^2-a^2x^3=a^2\left(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3\right)=a^2(a-x)^3$
19. $3x^2-4x+1=3x^2+(-3-1)x+1=3x^2-3x-x+1=3x(x-1)-(x-1)=(x-1)(3x-1)$
20. $2x^4-5x^2-12=2x^4+(3-8)x^2-12=2x^4-8x^2+3x^2-12=2x^2\left(x^2-4\right)+3\left(x^2-4\right)=$
$\left(x^2-4\right)\left(2x^2+3\right)=(x-2)(x+2)\left(2x^2+3\right)$

*** ***

Seconda Parte

Parte A)- Semplificazione di frazioni algebriche

1. $\dfrac{x^2-4x}{x^2+2x}\ \dfrac{\cancel{x}(x-4)}{\cancel{x}(x+2)}=\dfrac{x-4}{x+2}$, con la C.d.Eq. $x\neq0$.
2. $\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{x+1}$
3. $\dfrac{a(a-x)}{a^2-x^2}=\dfrac{a\cancel{(a-x)}}{\cancel{(a-x)}(a+x)}=\dfrac{a}{a+x}$, con la $C.d.Eq.\ a-x\neq0$
4. $\dfrac{a^3+ax^2}{a^4-x^4}=\dfrac{a(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}=\dfrac{a}{a^2-x^2}$, con la $C.d.Eq.\ a^2+x^2\neq0$
5. $\dfrac{a^2+ay-ax-xy}{ay+y^2}=\dfrac{(a-x)(a+y)}{y(a+y)}=\dfrac{a-x}{y}$, con la $C.d.Eq.\ a+y\neq0$
6. $\dfrac{x^2-2x-8}{x^3-4x^2+4x}=\dfrac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)^2}=\dfrac{x+4}{x(x-2)}$
7. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+x^2-x-1}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x^2-1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)^2}=\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$, con la $C.d.Eq.$ $x-1\neq0$
8. $\dfrac{ay+y^2+2a+2y}{y^3+8}=\dfrac{(a+y)(y+2)}{(y+2)(y^2-2y+4)}=\dfrac{a+y}{y^2-2y+4}$, con la $C.d.Eq.\ y+2\neq0$
9. $\dfrac{ax^4-2a^4x^2+a^7}{x^6-a^9}=\dfrac{a(x^4-2a^3x^2+a^6)}{(x^2)^3-(a^3)^3}=\dfrac{a(x^2-a^3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x^2-a^3)}(x^4+a^3x^2+a^6)}=\dfrac{a(x^2-a^3)}{x^4+a^3x^2+a^6}$, con la $C.d.Eq.\ x^2-a^3\neq0$
10. $\dfrac{a^{2n}-a^n}{a^{n+3}-a^{n+1}}=\dfrac{a^n\cancel{(a^2-1)}}{a^{n+1}\cancel{(a^2-1)}}=\dfrac{1}{a}$, con la $C.d.Eq.\ a\neq\pm1$.

*** ***

Ridurre le frazioni di ciascun gruppo allo stesso minimo comun denominatore.

1. $\left\{\dfrac{x}{x^2-4};\dfrac{1}{x^2-2x}\right\}$ Si osserva che **le frazioni sono irriducibili**. Scomponiamo i rispettivi denominatori.
   a. $\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$; $\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x(x-2)}$
   b. Il m.c.d. fra i denominatori delle due frazioni è il polinomio $x(x-2)(x+2)$ per cui le frazioni assumono rispettivamente le seguenti forme: $\dfrac{x^2}{x(x-2)(x+2)}, \dfrac{(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$

2. $\left\{\frac{a+1}{2a};\frac{a^2+ab}{a^2-1}\right\}$ Le due frazioni sono irriducibili. Per il denominatore della seconda frazione si ha $a^2-1=(a-1)(a+1)$. Il m.c.d. fra i due denominatori è $m.c.d.=2a(a-1)(a+1)$. Le frazioni diventano

   a. $\frac{a+1}{2a}=\frac{(a-1)(a+1)^2}{2a(a-1)(a+1)}$

   b. $\frac{a^2+ab}{a^2-1}=\frac{2a(a^2+ab)}{2a(a-1)(a+1)}=\frac{2a^2(a+b)}{2a(a-1)(a+1)}$

3. $\left\{\frac{a-2}{a^2-4};\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2};\frac{b+1}{b^2+b}\right\}$ **Le tre frazioni non sono irriducibili**. Procediamo preventivamente con la loro semplificazione.

   a. $\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{\cancel{(a-2)}}{(a+2)\cancel{(a-2)}}=\frac{1}{a+2}$, sotto la C.d.Eq. a-2≠0;

   b. $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$

   c. $\frac{b+1}{b^2+b}=\frac{b+1}{b(b+1)}=\frac{1}{b}$, sotto la C.d.Eq. b+1≠0

   d. Il m.c.d. fra i denominatori residui delle tre frazioni del gruppo è b(a+2)(a+b) e le tre frazioni ridotte allo stesso denominatore diventano

      i. $\frac{1}{a+2}=\frac{b(a+b)}{b(a+2)(a+b)}$

      ii. $\frac{1}{a+b}=\frac{b(a+2)}{b(a+2)(a+b)}$

      iii. $\frac{1}{b}=\frac{(a+2)(a+b)}{b(a+2)(a+b)}$

   Osserviamo che le equivalenze tra le espressioni iniziali delle tre frazioni e quelle finali sussistono sotto le seguenti condizioni

   (a-2≠0)∧(b+1≠0) ∧(b≠0) ∧(a+2≠0) ∧(a+b≠0)

4. $\left\{\frac{x^2-4x}{x^2+2x};\frac{x}{x-2};\frac{1}{x^2}\right\}$ Osserviamo che **la prima frazione del gruppo non è irriducibile**; semplificandola diventa $\frac{x-4}{x+2}$, con la C.d.Eq. x≠0. Il m.c.d. delle tre frazioni è il polinomio $x^2(x+2)(x-2)$. Le tre frazioni si trasformano come segue:

   $\frac{x-4}{x+2}=\frac{x^2(x-4)(x-2)}{x^2(x+2)(x-2)}$; $\frac{x}{x-2}=\frac{x^3(x+2)}{x^2(x+2)(x-2)}$; $\frac{1}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)(x-2)}$

   Le uguaglianze ottenute hanno senso per i valori reali di x tali che (x ≠0)∧(x≠±2).

5. $\left\{\frac{a}{a^2};\frac{a^2-1}{a^3-2a^2+a};\frac{a^3+1}{a^2+a}\right\}$ Osserviamo che le tre frazioni del gruppo non sono irriducibili; procediamo dunque preliminarmente a semplificarle. Si ha:

   a. $\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$

   b. $\frac{a^2-1}{a^3-2a^2+a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a(a-1)^2}=\frac{a+1}{a(a-1)}$

   c. $\frac{a^3+1}{a^2+a}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a(a+1)}=\frac{a^2-a+1}{a}$, con la $C.d.Eq.\ a+1\neq 0$

Il m.c.d. per le tre frazioni semplificate è il polinomio $a(a-1)(a+1)$ per cui le tre frazioni si trasformano come segue:

$$\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a(a-1)(a+1)};\qquad \frac{a+1}{a(a-1)}=\frac{(a+1)^2}{a(a-1)(a+1)};$$

$$\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{(a^2-a+1)(a-1)(a+1)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a^3+1)(a-1)}{a(a-1)(a+1)}$$

Le equivalenze tra le espressioni iniziali delle tre frazioni e quelle finali sussistono sotto le seguenti condizioni $(a\neq 0)\wedge(a\neq \pm 1)$.