Discussione di un'equazione parametrica di secondo grado

Quesiti vari

Considerata l'equazione parametrica $4kx^2+4(1-3k)x+9k=0$ determinare i valori del parametro k per i quali sono soddisfatte le singole richieste.

1) Le due radici sono reali e distinte.
2) Una radice è -3. Determinare il valore della seconda radice.
3) La somma delle radici dell'equazione vale -13/4. Calcolare le radici.
4) La differenza tra le due radici vale 5/4.
5) Una radice è doppia dell'altra.

Elaborazioni

Premessa

Il coefficiente del termine di secondo grado dipende dal parametro ed è diverso da zero solo se k≠0. Con k=0 l'equazione diventa di primo grado e si riduce all'equazione monomia 4*x*=0 che ammette solo la radice *x* =0. Nel seguito considereremo solo valori reali di k diversi da zero.

Risoluzione dei quesiti

1) Le radici dell'equazione sono reali e distinte se e solo se il discriminate del trinomio al primo membro è strettamente positivo.

$$\frac{\Delta}{4}=4(1-3k)^2-4k\cdot 9k>0 \Leftrightarrow k<\frac{1}{6}$$

2) Per definizione un numero è radice dell'equazione se sostituito al posto dell'incognita soddisfa l'equazione. Ponendo *x*=-3 nell'equazione deve risultare

$$36k-12(1-3k)+9k=0 \to 81k-12=0 \to k=\frac{4}{27}.$$

L'equazione corrispondente è $\frac{16}{27}x^2+4\left(1-3\cdot\frac{4}{27}\right)x+9\cdot\frac{4}{27}=0$, che semplificata diventa

$4x^2+15x+9=0$, le cui radici sono $x_1=-3$, $x_2=-\frac{3}{4}$.

3) Per risolvere il quesito basta utilizzare la nota relazione di Cartesio [(1)] tra la somma delle radici e i coefficienti della stessa.

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{1-3k}{k}=-\frac{13}{4}$, da cui si ricava $k=\frac{4}{25}$. L'equazione pertanto è la seguente

---

[(1)] Si ricordi che in ogni equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ sussistono le seguenti relazioni (dette di Cartesio) tra i coefficienti e le radici dell'equazione stessa: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$

$\frac{16}{25}x^2+4\left(1-\frac{12}{25}\right)x+\frac{36}{25}=0 \to 4x^2+13x+9=0$. Le due radici dell'equazione sono

$x_2^1=\frac{-13\pm 5}{8} \to x_1=-\frac{9}{4},\ x_2=-1$.

4) La differenza tra le due radici deve valere $x_2-x_1=\frac{5}{4}$. Per risolvere il quesito si deve impostare un sistema formato dalla precedente equazione e dalle due equazioni dedotte applicando le relazioni di Cartesio tra i coefficienti dell'equazione e le radici. Il sistema è:

$$\begin{cases} x_2-x_1=\frac{5}{4} \\ x_1+x_2=-\frac{1-3k}{k} \\ x_1x_2=\frac{9}{4} \end{cases} \to \begin{cases} x_2=x_1+\frac{5}{4}=\frac{17k-4}{8k} \\ x_1=\frac{7k-4}{8k} \\ x_1x_2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

, dal quale si ricava la seguente equazione nel parametro k

$\frac{7k-4}{8k}\cdot\frac{17k-4}{8k}=\frac{9}{4}$, che semplificata diventa $25k^2+96k-16=0$. Le radici di quest'equazione sono

$k_2^1=\frac{-48\pm 52}{25}$, quindi $k_1=-4$, $k_2=\frac{4}{25}$.

Concludiamo che esistono due diverse equazioni numeriche che si deducono dall'equazione parametrica in oggetto le cui radici hanno la proprietà richiesta e sono:

$k_1=-4 \to 4x^2-13x+9=0$, le cui radici sono $x_1=1$, $x_2=\frac{9}{4}$;

$k_2=\frac{4}{25} \to 4x^2+13x+9=0$,le cui radici sono $x_1=-\frac{9}{4}$, $x_2=-1$.

5) Una radice deve essere doppia dell'altra. Esprimiamo la condizione ponendo: $x_2=2x_1$. Anche per risolvere questo quesito si deve impostare il sistema di equazioni composto dalla predetta condizione e dalle due relazioni di Cartesio. Il sistema è:

$$\begin{cases} x_2=2x_1 \\ x_1+x_2=\frac{3k-1}{k} \\ x_1x_2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

, da cui si ha

$$\begin{cases} x_2=\frac{2(3k-1)}{3k} \\ x_1=\frac{3k-1}{3k} \\ x_1x_2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

, quindi k deve essere soluzione dell'equazione

$\frac{3k-1}{3k}\cdot\frac{2(3k-1)}{3k}=\frac{9}{4} \to 8(3k-1)^2=81k^2 \to 9k^2+48k-8=0$; quest'equazione ammette come radici i valori $k_1=-\frac{6\sqrt{2}+8}{3}$, $k_2=\frac{6\sqrt{2}-8}{3}$.

Il lettore osservi che i valori trovati per il parametro sono entrambi minori di 1/6, quindi le corrispondenti equazioni, le cui espressioni algebriche si lasciano come esercizio, ammetteranno ciascuna due radici reali e distinte.