Discussione di un’equazione parametrica di secondo grado

Quesiti vari

In relazione all’equazione parametrica $4x^2+x+4-3k=0$ stabilire per quali valori del parametro sono soddisfatte le richieste che seguono.

1) Le radici sono reali e distinte.
2) Le radici sono coincidenti. Determinare il corrispondente valore delle radici.
3) Le radici sono reciproche tra loro. Precisare se i valori delle radici sono reali.
4) La somma delle radici è uguale al prodotto delle stesse. Calcolare i valori delle due radici.
5) La somma dei quadrati delle radici è 113/16. Riconosciuto che esiste un solo valore del parametro k per cui si verifica la condizione, risolvere la corrispondente equazione numerica.

Elaborazioni

Premessa

Il coefficiente del termine di secondo grado è diverso da zero, quindi l’equazione in oggetto è di secondo grado per ogni k reale.

1) Le radici dell’equazione sono reali e distinte se e solo se il discriminate del trinomio al primo membro è strettamente positivo.

$$\Delta=1-4\cdot4\cdot(4-3k)>0 \Leftrightarrow k>\frac{21}{16}$$

2) Le radici dell’equazione sono coincidenti se e solo se il suo discriminante vale zero, quindi per k=21/16. Per detto valore del parametro il valore comune delle radici è: $x_1=x_2=-\frac{1}{8}$.

3) Le radici sono reciproche tra loro se il loro prodotto vale 1. Poiché $x_1\cdot x_2=\frac{4-3k}{4}=1$, si ricava k =0. Osserviamo però che per $k<\frac{21}{16}$ risulta Δ<0, quindi per k =0 le radici saranno reciproche ma sono numeri complessi.

4) $x_1+x_2=x_1\cdot x_2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{4}=\frac{4-3k}{4} \Leftrightarrow 3k=5$, da cui $k=\frac{5}{3}$. Per questo valore del parametro l’equazione diventa

$4x^2+x-1=0$, le cui radici sono $x_2^1=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$, cioè $x_1=-\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ e $x_2=\frac{\sqrt{17}-1}{8}$.

5) Occorre studiare come si presenta l’uguaglianza

$x_1^2+x_2^2=\frac{113}{16}$ in funzione dei coefficienti dell’equazione.

---

(1) Si tengano presente le relazioni di Cartesio tra i coefficienti e le radici dell’equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Tenendo presente che sussiste la relazione[2] $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$, utilizzando le relazioni di Cartesio per la somma ed il prodotto delle radici dell'equazione (nota (1)) si ha:

$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{4-3k}{4}\right)=\frac{113}{16}$$

Si tratta di un'equazione di primo grado che risolta fornisce k=6.

L'equazione numerica corrispondente è

$4x^2+x-14=0$, le cui radici sono $x_1=-2$, $x_2=\frac{7}{4}$.

Verifica della proprietà:

$$x_1^2+x_2^2=\left(-2\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2=4+\frac{49}{16}=\frac{113}{16}.$$

[2] Questa relazione è detta la "prima formula di Waring".