Ricerca Operativa

Produzione tessile e vendita dei prodotti

Problema[(1)]

Una piccola industria tessile produce un tessuto per arredamento e sostiene un costo di € 14 al metro, una spesa fissa mensile di 2000 e un costo per la pubblicità valutato pari all'1% del quadrato del numero dei metri prodotti.

Vende il tessuto a € 32 al metro fino a 600 metri, per quantità superiori il prezzo si riduce a € 30 al metro.

Sapendo che la capacità massima produttiva mensile è di 1000 metri, determinare quanti metri conviene produrre e vendere per ottenere il massimo utile e il numero di metri minimo che deve produrre per non essere in perdita.

Risoluzione

a) Sia x il numero di metri di tessuto prodotti mensilmente dall'industria, che supponiamo riesca a vendere interamente.

Il numero minimo x di metri di tessuto da produrre e vendere affinché l'attività industriale non sia in perdita deve essere tale che il ricavo sia uguale ai costi che si devono fronteggiare.

Nella fascia di produzione $1 \le x \le 600$ metri il ricavo R(x) dalla vendita in euro è R(x)=32x.

Valutiamo in questa fascia i costi affrontati: $C(x) = 2000+14x+0,01x^2$.

Imponiamo che sia soddisfatta la condizione R(x)= C(x), quindi

$32x=2000+14x+0,01x^2$, da cui $0,01x^2-18x+2000=0$

Le radici dell'equazione sono $x = \frac{9 \pm \sqrt{81-20}}{0,01} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{0,01}$, quindi $x_1 = \frac{9-\sqrt{61}}{0,01} = 118,97 \simeq 119$;

$x_2 = \frac{9+\sqrt{61}}{0,01} \simeq 1691 > 600$

Concludiamo che producendo e vendendo 119 metri di tessuto l'azienda riesce ad uguagliare il costo totale di produzione con il ricavo.

b) Produzione al massimo della capacità consentita e ricavo dell'utile massimo

Il costo totale di produzione C(x) è la stessa funzione ottenuta per la fascia di produzione $1 \le x \le 600$; il ricavo, invece, è 32x nella fascia suddetta, mentre è $R(x) = 32 \cdot 600 + (x-600) \cdot 30$ nella fascia successiva $600 < x \le 1000$. In sintesi possiamo scrivere l'espressione

$$R(x) = \begin{cases} 32x & per \quad 1 \le x \le 600 \\ 30x+1200 & per \quad 600 < x \le 1000 \end{cases}$$

(1) Problema n. 72 riportato a pag. 169 del volume Matematica per indirizzo economico, vol 3, Tramontana- Autori A. Gambotto, B. Consolini, D. Mazzone

La funzione dell'utile realizzato è la seguente

$$U(x)=\begin{cases}-0,01x^2+18x-2000 & per \quad 119\le x\le 600\\ -0,01x^2+16x-800 & per \quad 600<x\le 1000\end{cases}$$

Determiniamo il massimo della funzione U(x) ricorrendo allo studio della funzione derivata prima.

Osserviamo che la funzione è definita per casi ma è continua e il suo dominio è l'intervallo chiuso e limitato [119;1000], quindi certamente per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto (oltre che minimo).

La Funzione derivata prima dell'utile è

$$U'(x)=\begin{cases}-0,02x+18 & per \quad 119\le x<600\\ -0,02x+16 & per \quad 600<x\le 1000\end{cases}$$

Per $119\le x<600$ risulta:
$U'(x)\ge 0 \to -0,02x+18\ge 0\to x\le 900$, dunque nell'intervallo]119;600[la derivata prima è positiva e la funzione è strettamente crescente; si deduce che l'estremo superiore di U(x) si ha per x=600 e vale Sup(U(x))= U(600)=5200 (euro).

Occorre ora studiare l'andamento della funzione U(x) nell'intervallo]600;1000].

Per la derivata prima si ha:

$U'(x)\ge 0\to -0,02x+16\ge 0\to x\le 800$;

dunque nell'intervallo]600;800[la funzione U(x) è strettamente crescente e nell'intervallo]800;1000] è strettamente decrescente. Il punto x=800 è di massimo e risulta U(800)=5600 (euro).

Confrontando il valore del massimo dell'utile nei due intervalli [119; 600],]600;1000] si deduce che il valore

maggiore della funzione utile si ha per x=800.

Osservazione (sulla derivabilità della funzione U(x))

La funzione U(x) nel punto x=600 non è derivabile, infatti sono diversi, ma finiti, i valori della derivata sinistra e destra:

$U'_-(600)=6\,;U'_+(600)=4$

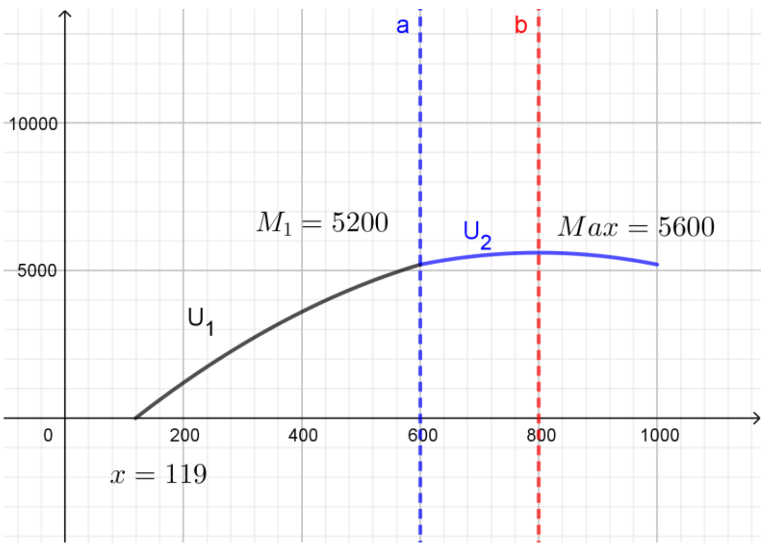

Figura 1-L'utile massimo si realizza producendo 800 metro di tessuto. Nel punto x=600 la curva dell'utile presenta un punto angoloso.

Il diagramma della funzione U(x) è riportato In Figura 2. Precisiamo che è stato rappresentato solo per i valori dell'intervallo [119;1000], perché si ha effettivamente un utile per l'attività se x≥119 metri di tessuto e dato che è imposto il vincolo massimo della capacità produttiva in 1000 unità.