

Studio di un finanziamento

(con estinzione del debito a rate costanti)

Si consideri un contratto di acquisto a rate di un certo bene. Il prezzo del bene è $A=4500$. L'anticipo richiesto è $B=0,2A$. Le rate contrattuali, di ammontare R , sono 4, e sono dovute alla fine di ciascun semestre. Il tasso annuo di interesse contrattuale è $i=4\%$.

1. Calcolare R .
2. Scomporre R alla fine del primo semestre in quota interessi e quota capitale.
3. Si supponga che sia trattenuto un costo iniziale pari a 40 e che le rate siano caricate dell'1,5% del loro valore per costi di incasso. Scrivere l'equazione che definisce il tasso annuo x^* che tiene conto di tali spese accessorie.

Elaborazioni

1. Il contratto di acquisto descritto rappresenta una **rendita certa temporanea** con cui il contraente si impegna ad estinguere un debito $C=A-0,2A=0,8A$, con $A=4500$ (unità monetarie, per esempio €), quindi $C=0,8 \cdot 4500=3600$, in **4 rate posticipate costanti semestrali di importo R** , nell'ipotesi che il tasso di capitalizzazione applicato sul finanziamento ricevuto sia $i=4\%$ annuo. Si deve **calcolare l'ammontare della rata R** .

- a. Poiché gli intervalli temporali che definiscono le scadenze per i versamenti delle poste monetarie R sono dei semestri determiniamo innanzitutto il tasso semestrale i_2 equivalente al tasso annuo applicato i . La relazione tra i due tassi è $(1+i_2)^2=1+i$, da cui $i_2=\sqrt{1+i}-1$.
- b. Il valore attuale C del finanziamento ottenuto all'atto della sottoscrizione del contratto espresso tramite l'importo della rata R e del tasso (semestrale) applicato è

$$V_{attuale} = C = R \left[\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} \right], \text{ con } n=4, \text{ per cui si determina l'importo } R \text{ come segue}$$

$$R = \frac{C}{\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}} = C \cdot \frac{i_2}{1-(1+i_2)^{-n}} = C \cdot \frac{\sqrt{1+i}-1}{1-(\sqrt{1+i})^{-n}}.$$

Ponendo nella formula $C=3600$, $i=4\%=0,04$, $n=4$ si ottiene l'importo della rata

$$R = 3600 \cdot \frac{\sqrt{1+0,04}-1}{1-(\sqrt{1+0,04})^{-4}} = 3600 \cdot 0,262499 \approx 944,996 \approx 945,00.$$

2. L'importo della rata R versato alla fine del primo semestre contiene una quota capitale C_1 e gli interessi di importo I_1 maturati in regime di capitalizzazione composta al tasso (semestrale) i_2 . Poiché il capitale investito (somma a disposizione del contraente) è 3600 per la durata di 6 mesi, gli interessi maturati sono $I_1 = 3600 \cdot i_2 = 3600 \cdot (\sqrt{1+i}-1) = 3600 \cdot (\sqrt{1,04}-1) \approx 71,2940$, per cui la quota capitale rimborsata con la prima rata è $C_1 = R - I_1 = 944,996 - 71,294 = 873,702$.
3. In virtù delle nuove condizioni definite per la definizione del contratto osserviamo che:

- il contraente deve versare anticipatamente la somma $0,2A=0,2 \cdot 4500=900$;
- sulla somma residua di 3600 sarà trattenuto il costo iniziale dell'operazione di 40 (unità monetarie), per cui il contraente non riceverà effettivamente 3600 (unità monetarie) ma $3600-40=3560$ (unità monetarie);
- la somma di 3560 (unità monetarie) rappresenta il valore attuale del finanziamento residuo che riceve per il quale il contraente si impegna a versare quattro rate costanti di importo R^* , con cadenza semestrale, per l'estinzione del debito sapendo che $R^*=R+R \cdot 1,5\%=R(1+1,5\%)=945 \cdot 1,015=959,175$. Indicando con x^* il tasso annuo effettivo al quale viene definito di fatto il contratto, deve sussistere l'uguaglianza seguente

$$R^* = 3560 \cdot \frac{\sqrt{1+x^*}-1}{1-(\sqrt{1+x^*})^{-4}}, \quad 959,175 = 3560 \cdot \frac{\sqrt{1+x^*}-1}{1-(\sqrt{1+x^*})^{-4}}, \quad \text{quindi}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^*}-1}{1-(\sqrt{1+x^*})^{-4}} = \frac{959,175}{3560} \approx 0,26943$$

Posto per brevità $\sqrt{1+x^*} = y$ si ottiene l'equazione

$$\frac{y-1}{1-y^{-4}} = 0,26943 \rightarrow \frac{y^4}{y^3+y^2+y+1} = 0,26943$$

La soluzione approssimata dell'equazione è $y=1,03063$, pertanto risulta

$$\sqrt{1+x^*} = 1,03063 \rightarrow x^* = 1,03063^2 - 1 = 0,062198 \approx 6,22\%$$

Osservazione (Modellizzazione matematica e realtà) - Il tasso annuo effettivo globale (TAEG) che il contraente deve corrispondere all'Istituto di Credito che gli concede il finanziamento, con le condizioni descritte nel punto 3., è 6,22%, pari a 1,56 volte il tasso annuale $i=4\%$ dichiarato nel testo del problema, dunque con un aumento del 56%. Se effettivamente un Istituto di Credito applicasse le trattenute ed i ricarichi sulle rate come descritto, a nostro avviso, i costi di gestione sarebbero senza dubbio "esagerati" e certamente non concorrenziali nei mercati finanziari.

