Su una rendita temporanea posticipata

Operazioni finanziarie con tassi quadrimestrali

Problema

Tizio dà in prestito a Caio oggi la somma di €42.000 e Caio si impegna ad estinguere il debito tramite rate di importo costante quadrimestrali da versare sul c.c. di Tizio presso un Istituto di Credito applicando un tasso di interesse quadrimestrale del 4%. L'Istituto di Credito corrisponde a Tizio un tasso di interesse quadrimestrale dell'1,5% sulle somme depositate, in regime di capitalizzazione composta. Tizio, dopo 6 anni ritira la somma di 20.000 euro.

Quesiti

1) Determinare l'importo della rata R quadrimestrale che Caio deve versare a beneficio di Tizio.
2) Determinare il montante che Tizio si ritrova sul proprio C.C. alla fine dei dieci anni di validità della rendita.
3) Determinare il tasso di rendimento effettivo al quale Tizio può ritenere che siano state capitalizzate le somme prestate (a Caio) o depositate (presso l'Istituto di Credito) di cui non ha avuto la disponibilità effettiva nel corso dei dieci anni.

Soluzione

1) Osserviamo che Caio riceve oggi la somma di € 42.000 e si impegna a versare in favore di Tizio n. 10x3=30 rate di importo costante R, ciascuna alla fine di ogni quadrimestre, per i successivi dieci anni. Sul debito contratto Caio deve corrispondere a Tizio un tasso di interesse effettivo quadrimestrale del 4%.

   Tizio con l'operazione finanziaria pattuita risulterà essere beneficiario di una rendita limitata posticipata a rata costante di importo R che si protrarrà per i successivi 30 quadrimestri il cui valore attuale oggi è € 42.000. Sapendo che sulla somma ricevuta in prestito Caio deve corrispondere il tasso di interesse quadrimestrale del 4%, si può determinare l'importo della rata R attualizzando la rendita ad oggi ed uguagliando il valore ottenuto alla somma ricevuta di €42.000.

   Dalla formula di attualizzazione[1] della rendita risulta

$$R = 42.000\frac{i_3}{1-(1+i_3)^{-30}} = 42.000\frac{0,04}{1-(1+0,04)^{-30}} = €2.428,86$$

   Pertanto Caio per estinguere il debito contratto dovrà versare 30 rate quadrimestrali di importo € 2.428,86 in favore di Tizio.

---

[1] Ricordiamo che una rendita di rata R posticipata, valutata al tasso periodale i, all'atto dell'n-esimo versamento produce un montante $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$. Il valore C del montante M attualizzato all'inizio della definizione della rendita è $C = M(1+i)^{-n}$. Nel caso in esame il valore del capitale iniziale è C=42.000 euro, quindi

$$C = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \to R = C\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

2) Tizio decide di ritirare € 20.000 alla fine del sesto anno dall'avvio della rendita e di lasciare la parte residua sul c.c. bancario che insieme alle successive rate versate da Caio produrrà alla fine del decimo anno un montante disponibile per Tizio. Calcoliamo il montante maturato dalla rendita con i versamenti eseguiti nei primi 6 anni, le cui somme sono capitalizzate al tasso quadrimestrale i^*_3=1,5%.

Poiché sono state versate 6x3=18 rate di importo R, il montante M_1 maturato in favore di Tizio è

$$M_1 = R \cdot \frac{(1+i^*_3)^{18} - 1}{i^*_3} = €2.428,86 \frac{(1,015)^{18} - 1}{0,015} = €49.765,83$$

Dopo che Tizio ritira 20.000 euro sul suo c.c. rimane la somma C_2=€29.765,83 che continuerà a fruttare interessi con il tasso quadrimestrale i^*_3=1,5%.

Alla fine del decimo anno (a conclusione della rendita, cioè all'atto del versamento della 30°-esima rata R da parte di Caio), Tizio dispone del montante costituito dal montante M_2 maturato dalla capitalizzazione di C_2=€29.765,83 e dal montante M_3 prodotto dagli ulteriori 12 versamenti di importo R eseguiti da Caio. Risulta

$$M_2 = C_2 (1+i^*_3)^{12} = €29.765,83(1,015)^{12} \approx €35.588,57\ ;$$

$$M_3 = R \cdot \frac{(1+i^*_3)^{12} - 1}{i^*_3} = €2.428,86 \cdot \frac{1,015^{12} - 1}{0,015} \approx €31.675,28$$

Concludiamo che il montante a disposizione di Tizio sul c.c. alla fine dei dieci anni è

$$M_4 = M_2 + M_3 = €35.588,57 + €31.675,28 \approx €67.263,84$$

3) Per la determinazione del tasso effettivo annuale *i** di rendimento al quale possiamo pensare che siano state capitalizzate le somme investite da Tizio dobbiamo osservare che quest'ultimo ha prestato per 10 anni la somma di €42.000, è rientrato in possesso dopo sei anni della somma di €20.000 e dispone della somma M_4=€67.263,84 a conclusione del decimo anno. Ebbene, scontando per 6 anni al tasso incognito *i** la somma di €20.000 e per 10 anni la somma di €67.263,84 il risultato delle somme ottenute deve coincidere con la somma impegnata €42.000. In tal modo si ricava un'equazione nell'incognita *i** che risolta fornisce la soluzione cercata.

Per quanto premesso si ha:

$V'_a = €20.000 \cdot (1+i^*)^{-6}$ valore attuale dei 20.000 euro all'epoca del prestito di €42.000;

$V''_a = €67.263,84 \cdot (1+i^*)^{-10}$ valore attuale del montante globale finale disponibile sul c.c. all'epoca del prestito di €42.000;

$V'_a + V''_a = €42.000$, da cui

$$€20.000 \cdot (1+i^*)^{-6} + €67.263,84 \cdot (1+i^*)^{-10} = €42.000$$

Ponendo $(1+i^*)^{-1} = x$ si perviene all'equazione di decimo grado

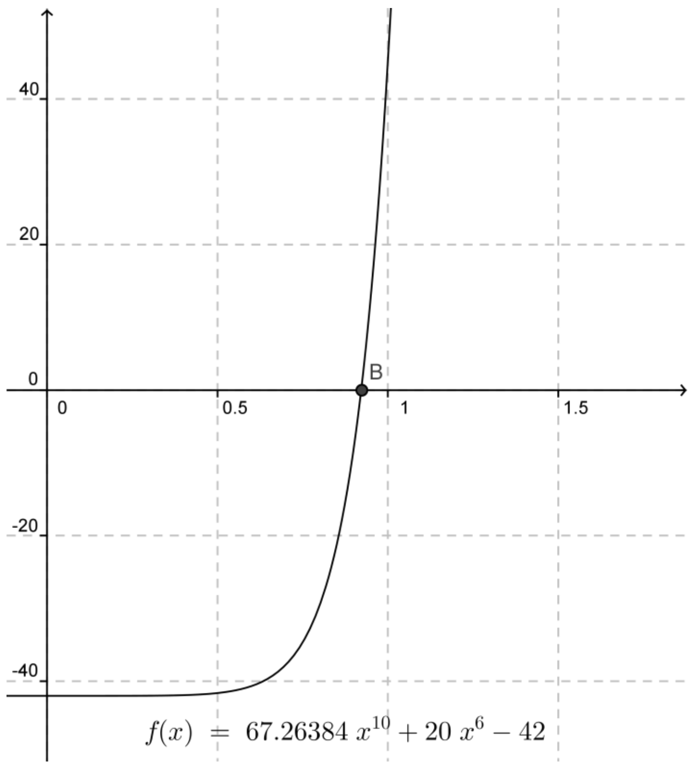
$67.263,84\cdot x^{10}+20.000\cdot x^{6}=42.000$, che riduciamo alla forma

$67,26385\cdot x^{10}+20\cdot x^{6}=42$

Studiando il polinomio

$P(x)=67,26384\cdot x^{10}+20\cdot x^{6}-42$

riusciamo a dedurre che ammette uno zero internamente all'intervallo]0;1[ed il suo valore è approssimativamente x=0,92164 e quindi risulta



$(1+i^{*})^{-1}=0,92164$, da cui

$$i^{*}=\frac{1}{0,92164}-1=0,08502\approx 8,5\%$$

Concludiamo che Tizio può ritenere che le somme che ha investito nei periodi in cui le stesse non sono state a sua disposizione sono state impiegate ad un tasso effettivo di rendimento annuo di circa l'8,5%.