Combinazione ottima di fattori produttivi

Un'azienda produce un bene e i costi sono espressi dalla funzione C=100L+150K, dove L rappresentano le unità lavorative e K le unità di capitale impiegato.

Vuole produrre la quantità Q=600 (unità convenzionali).

Determinare la composizione di L e K in modo da minimizzare i costi, sapendo che la funzione di produzione è Q=LK.

Soluzione

Essendo Q=600, ed L=600/K, a funzione da minimizzare è

$$C = 100L + 150K = \ 100 \cdot \frac{600}{K} + 150K = 150\left(\frac{400}{K} + K\right)$$

Dunque $C(K) = 150\left(\frac{400}{K} + K\right)$, con K>0. Si deve trovare il minimo di questa funzione.

$$C'(K) = 150\left(-\frac{400}{K^2} + 1\right)$$

Osserviamo che nel dominio di definizione K>0 la derivata prima si annulla solo nel punto K=20; inoltre, relativamente al suo segno, si riconosce che

$C'(K) < 0$ per 0<K<20;

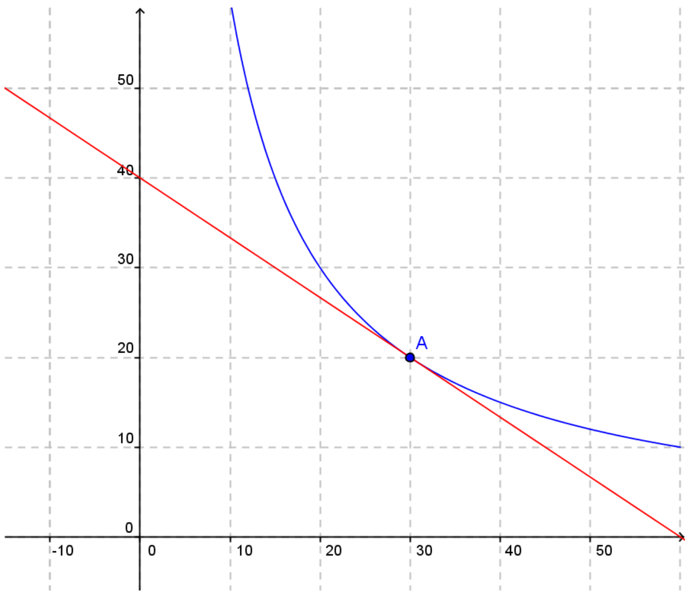
$C'(K) > 0$, per K>20.

Pertanto la funzione C(K) è strettamente decrescente nell'intervallo]0;20[e strettamente crescente per K>0. Si deduce che il punto K=20 è di minimo assoluto e risulta

$$C(20) = 150\left(\frac{400}{20} + 20\right) = 6000$$

Composizione delle scelte per L e K

Con K=20, dalla relazione L=600/K, si ricava L=30.



Rappresentazione grafica

A margine è rappresentata la funzione K=600/L e la retta 100L+150K=6000, ottenuta dalla funzione dei costi in corrispondenza della combinazione L=30, K=20 che minimizza il costo. Si osservi che la retta è tangente alla curva (un'iperbole equilatera) proprio nel punto (30;20)